17/10

Ορισμός (Παράγωγο σύνολο)

$A' = \{x \in E : (\forall r>0) : \underline{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$ $\quad \left(\underline{B}(x,r) = B(x,r) - \{x\} \right)$

$ext A = (A^c)^o$, $\partial A = (A^o)^c \cap (ext A)^c$

Παρατήρηση

$2 \in B(2,r) \cap A,\ r>0 \Rightarrow 2 \in \bar{A}$

$\underline{B}(2,\frac{1}{2}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow 2 \notin A'$

Θεωρώ $x \in A' \Leftrightarrow (\forall r>0) : \underline{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{\underline{B}(x,r) \subseteq B(x,r)}$
$(\forall r>0) : B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$ άρα $\underline{A' \subseteq \bar{A}}$

Πρόταση

Έστω E μ.χ. και $A \subseteq E$. Τότε:
$\alpha \in A' \Leftrightarrow (\forall U(\alpha))$ η $U(\alpha)$ περιέχει άπειρα σημεία του A (*)

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $B(\alpha,r)$ τυχούσα σφαιρ. περιοχή του α τότε:
$\xRightarrow{(*)}$ Η $B(\alpha,r)$ περιέχει άπειρα σημεία του A.
Έστω x ($x \neq \alpha$) ένα από αυτά. Τότε $x \in A$ και $x \in B(\alpha,r)$
$\Rightarrow x \in \underline{B}(\alpha,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in A'$

($\Rightarrow$) Έστω $\alpha \in A'$ και έστω δεν ισχύει το (*)
Άρα $\exists U(\alpha)$ που περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του A
Ας είναι αυτά $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και μέγιστα $\alpha = \alpha_i$ με $i=1,2,\dots,n$
Παίρνω ως $r = \min\{\rho(\alpha,\alpha_1), \dots, \rho(\alpha,\alpha_k)\} > 0$
Θεωρώ $r' \in \mathbb{R}$ με $r' < r$
άρα $\underline{B}(\alpha,r') \cap A = \emptyset$ ΑΤΟΠΟ!

$\partial A =$ σύνορο του A

(24)

$\partial A = (A^\circ)^c \cap (\text{ext}A)^c = \overline{A^c} \cap [(A^c)^\circ]^c = \overline{A^c} \cap [(\overline{A})^c]^c = \underline{\overline{A^c} \cap A}$

Επίσης $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (A^\circ)^c = \underline{\overline{A} - A^\circ}$

άρα τελικά $\partial A = \overline{A^c} \cap A = \overline{A} - A^\circ$ σύνορο του A

<u>Πρόταση</u>

Για τυχόν A υποσύνολο ενός μ.χ. E ισχύουν:

i) $\underline{A'} \subseteq \overline{A}$

ii) $\overline{A} = A \cup A'$

iii) $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$

iv) $\underline{\partial A} = \partial A^c$

v) $\overline{\partial A} = \partial A$

<u>Απόδειξη</u>

ii) $\overline{A} \supseteq A$ κ $\overline{A} \supseteq A' \Rightarrow \overline{A} \supseteq A \cup A'$ Αρκεί ν.δ.ο. $A \cup A' \supseteq \overline{A}$

Έστω α τυχόν στοιχείο με $a \in \overline{A}$ τότε επειδή $\overline{A} \supseteq A$

ισχύει: $a \in A$ ή $a \notin A$

α) Αν $a \in A \Rightarrow a \in A \cup A'$

β) Έστω $a \notin A$ κ έστω $B(a,r)$ τυχούσα σφαιρική περιοχή $\xrightarrow{a \in \overline{A}}$

$B(a,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow{a \notin A} B(a,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A' \Rightarrow a \in A \cup A'$

iii) Θα την κάνουμε στις ασκήσεις

iv) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{(A^c)^c} \cap \overline{A^c} = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \partial A^c$

v) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} \Rightarrow \overline{\partial A} = \overline{\overline{A} \cap \overline{A^c}} \subseteq \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{A^c}} = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

$\left.\begin{array}{l} \overline{\partial A} \subseteq \partial A \\ \overline{\partial A} \supseteq \partial A \end{array}\right\} \overline{\partial A} = \partial A$

$E = A^\circ \cup \partial A \cup (\text{ext}A)$

$A^\circ \cup \partial A \cup \text{ext}A \subseteq E$

Αρκεί ν.δ.ο $E \subseteq A^\circ \cup \partial A \cup \text{ext}A$

Ιδιότητες συνόρου

i) $\partial A^\circ \subseteq \partial A$

ii) $\partial \bar{A} \subseteq \partial A$

iii) $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$

iv) $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

Απόδειξη

i) $\partial A^\circ = \overline{A^\circ} - (A^\circ)^\circ = \overline{A^\circ} - A^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$

ii) $\partial \bar{A} = \bar{\bar{A}} - (\bar{A})^\circ = \bar{A} - (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$

iii) $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ = \partial A - (\partial A)^\circ \subseteq \partial A$

iv) Ισχύει $\partial(\partial(\partial A)) \subseteq \partial(\partial A)$ λόγω της (iii)

Αρκεί ν.δ.ο. $\partial(\partial(\partial A)) \supseteq \partial(\partial A)$

Θεωρώ x τυχόν: $x \in \partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ$ και $x \notin (\partial A)^\circ$

$\xrightarrow[(\partial(\partial A))^\circ \subseteq (\partial A)^\circ]{\partial(\partial A) \subseteq \partial A} x \notin (\partial(\partial A))^\circ$

Όμως $x \in \partial(\partial A) \Longrightarrow x \in \overline{\partial(\partial A)}$ $\Big\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x \in \overline{\partial(\partial A)} - (\partial(\partial A))^\circ \Rightarrow x \in \partial(\partial(\partial A))$

Πρόταση

i) A ανοιχτό $\Leftrightarrow A = A^\circ$

ii) A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Απόδειξη

i) (E,ρ) διακριτός μ.χ.

$A \subseteq E$

$a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subseteq A \Leftrightarrow B(a, \frac{1}{2}) \subseteq A \Rightarrow a \in A^\circ$

$A \subseteq A^\circ \xrightarrow{A^\circ \subseteq A} A = A^\circ$

ii) $A \subseteq \bar{A}$ θ.δ.ο. $\bar{A} \subseteq A$

Έστω $a \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall r>0)\, B(a,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(a,\frac{1}{2}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \{a\} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \in A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A$ Τελικά $\bar{A} = A$

(24)

Πρόταση

$$A \text{ ανοικτό} \Leftrightarrow \overbrace{A \text{ είναι περιοχή κάθε σημείου του}}^{(*)}$$

Παρατήρηση 1: Οι σφαιρικές περιοχές είναι ανοικτά σύνολα

Απόδειξη της πρότασης

Έστω A ανοικτό κ' x τυχόν σημείο του $A \xrightarrow{A=A^\circ} x \in A^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists U(x)) : U(x) \subseteq A \Rightarrow A$ περιοχή του x

Αποδείξαμε το $(\Rightarrow)$.

$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει το $(*)$. Θ.δ.ο. A ανοικτό δηλαδή $A = A^\circ$

δηλ. ότι $A \subseteq A^\circ$

Θεωρώ $x : x \in A$ τότε το A είναι περιοχή του x λόγω της $(*)$. Άρα υπάρχει περιοχή του x, το A με $A \subseteq A$ δηλ. $x \in A^\circ$

Παρατήρηση 2: Οι πυρήνες είναι ανοικτά σύνολα